

# Mathematik in der Antike

Marcel Kapfer

## Inhaltsverzeichnis

<b>1 Vorgriechische Mathematik</b>	<b>1</b>
1.1 Mathematik in Alt-Ägypten . . . . .	1
1.1.1 Darstellung von Zahlen . . . . .	2
1.2 Mathematik in Babylon und Mesopotamien . . . . .	3
1.2.1 Darstellung von Zahlen . . . . .	4
1.2.2 Astronomie . . . . .	5
<b>2 Griechische Mathematik</b>	<b>5</b>
2.1 Hellenisches Zeitalter . . . . .	6
2.2 Hellenistisches Zeitalter . . . . .	7
2.2.1 Euklid . . . . .	7
2.2.2 Archimedes . . . . .	8
2.2.3 Apollonios . . . . .	8
2.2.4 Weitere Mathematiker . . . . .	9
2.3 Epigonisches Zeitalter . . . . .	9
2.4 Darstellung von Zahlen . . . . .	10

## 1 Vorgriechische Mathematik

Im Vorfeld zur griechischen Mathematik gilt es sowohl die mathematischen Bewegungen im alten Ägypten, als auch die in Babylon und Mesopotamien zu betrachten. Von beiden Entwicklungen haben die griechischen Mathematiker vieles übernommen, wobei diese sich hauptsächlich auf die Ägypter als ihre geometrischen Lehrmeister bezogen. Die Verwendung babylonischer Erkenntnisse wird zwar selten erwähnt, allerdings lässt sich durch die verwendeten Methoden zurückschließen, dass auch die babylonische Mathematik einen Einfluss hatte. Der Beginn beider Zeitalter lässt sich auf etwa 3000 v. Chr. datieren.

### 1.1 Mathematik in Alt-Ägypten

Die Ägypter hatten ein dekadisches Zahlensystem, also ein Zahlensystem mit der Basis 10, genau wie das unsere. Als Rechenoperatoren waren neben der Addition und Subtraktion auch

die Verdopplung und Halbierung bekannt. Weitergehend waren auch Verfahren zur Verzehnfachung und zum Teilen durch 10 vorhanden. Durch die Art der Schreibweise der altägyptischen Zahlen war es möglich, sämtliche Rechenoperationen rein durch Veränderung der Ziffern durchzuführen. Dies ist beispielsweise auch mit den römischen Zahlen möglich: möchte man die Zahl **III** verdoppeln, so reicht es vollkommen, diese doppelt zu schreiben, also **III III** (ohne Beachtung, dass die Zahl 6 eine andere Darstellung – nämlich **VI** – hat).

Eine deutlich bedeutsameres Verfahren der Ägypter ist die Bruchrechnung. Die Ägypter kannten nur Stammbrüche, also Brüche mit 1 im Zähler, sowie  $\frac{2}{3}$  und  $\frac{3}{4}$ , letztere allerdings erst in späterer Zeit. Zur Addition und Subtraktion von Brüchen wurden diese zumeist in Stammbrüche zerlegt, wofür es verschiedene Algorithmen gab.

### 1.1.1 Darstellung von Zahlen


Das Prinzip der Darstellung von Zahlen im alten Ägypten gleicht dem, welches wir von den Römern kennen. Für jede Zehnerpotenz gab es ein eigenes Symbol, wobei in Ägypten Hieroglyphen verwendet wurden.

Zahlenwert	Symbol
Eins	
Zehn	∩
Hundert	ϩ
Tausend	𐍌
Zehntausend	𐍎
Hunderttausend	𐍈
Eine Million	𐍎𐍌

Somit lässt sich die Zahl 210341 wie folgt schreiben:

$$210341 = 2 \cdot 10^5 + 1 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 1 =$$

𐍈 𐍈 | ϩ ϩ ϩ ∩ ∩ ∩ ∩ |

Wie schon erwähnt, war es den Ägyptern auch möglich, mit Brüchen, vor allem Stammbrüchen, zu rechnen. Als „Grundsymbol“ für die meisten Brüche galt das Zeichen . Für Stammbrüche (also Brüche mit einer 1 im Nenner) wurde die Zahl des Zählers daruntergeschrieben, für  $\frac{1}{2}$  gab es auch ein eigenes Symbol (die auf dem Grundsymbol basierende Schreibweise wurde allerdings auch verwendet).

Bruch	Symbol
$\frac{1}{2}$	
$\frac{1}{3}$	
$\frac{1}{4}$	
$\frac{1}{11}$	

Für die „besonderen“ Brüche  $\frac{2}{3}$  und  $\frac{3}{4}$ , welche erst später verwendet wurden, gab es besondere Symbole, welche auch auf dem Grundsymbol aufbauen:

Bruch	Symbol
$\frac{2}{3}$	
$\frac{3}{4}$	

Weitergehend hatten die Ägyptern auch Symbole für + und -: und . Da in Ägypten sowohl von rechts nach links, als auch von links nach rechts geschrieben wurde, kann den Symbolen keine einheitliche Bedeutung zugeschrieben werden. Viel mehr wurde die Bedeutung des Symbols an sich für die Bestimmung der Bedeutung im konkreten Kontext verwendet. Die Hieroglyphen bezeichnen ein Paar Beine, welches entweder in eine andere Zahl hinein oder aus einer Zahl herausgeht. Gehen die Beine in eine Zahl hinein, so symbolisiert dies die Addition, gehen die Beine hinaus, die Subtraktion. Dies lässt sich durch folgendes Beispiel veranschaulichen, wobei hier von rechts nach links geschrieben wurde:

$$3 \text{ } 4 = 3 - 4$$

$$3 \text{ } 4 = 3 + 4$$

Neben dieser hieroglyphischen Darstellungsweise gab es auch noch zwei weitere. Zum einen eine Kursivschrift, als hieratisch bezeichnet, welche vor allem in wichtigen Papyri der ersten Hälfte des zweiten Jahrtausends v. Chr. verwendet wurde. Zum anderen gab es später auch noch eine weitere Form, welche als demotisch genannt wird. Diese lässt sich als weitere Abwandlung des hieratischen sehen. Es sei noch zu erwähnen, dass die coptische Schrift sich aus der demotischen weiterentwickelt hat. Ein bedeutender Schritt zur Entschlüsselung der unterschiedlichen Schriftarten war der Stein von Rosette, welcher von Champollion 1822 entziffert wurde.

## 1.2 Mathematik in Babylon und Mesopotamien

Im alten Babylon gab es, im Gegensatz zu Ägypten, kein Dezimalsystem, sondern ein sexagesimales Zahlensystem. Das bedeutet, dass die Basis nicht 10 ist, sondern 60. Im babylonischen System gab es allerdings keine 0, erst später kam ein „Lückenzeichen“ hinzu, welches *zwischen* Ziffern, allerdings *nie am Ende* von Zahlen verwendet wurde. Durch die Wahl des sexagesimalen Zahlensystems war es den Babyloniern möglich, einfachst mit reziproken Paaren (2 : 30, 3 : 20, 4 : 15, 5 : 12) zu rechnen. Daneben gab es auch die „regulären“ Zahlen (2, 3 und 5), sowie

deren Vielfache. „Irreguläre“ Zahlen, wie die 7, waren lange Zeit ausgeschlossen und kamen erst später auf. Es wurden auch Zahlentafeln mit Quadraten, Kuben und Wurzeln gefunden. Auch kannten die Babylonier schon Potenzen und Binomialkoeffizienten. Im Gegensatz zu unserer heutigen Mathematik und auch schon zu den Griechen, hatten die Babylonier kein eigenes Symbol für eine Unbekannte. Anstelle dessen wurden ausgeschriebene Wort verwendet.

Durch die – im Vergleich zu den Ägyptern – hohe Mathematik war es den Babyloniern auch möglich, lineare und kubische Gleichungssysteme zu lösen. Auch gab es schon Näherungsverfahren zur Lösung von Wurzeln. Die Babylonier kannten auch schon das, was uns als der Satz von Pythagoras bekannt ist (dies war allerdings auch schon den Indern bekannt). Auch für die Zahl  $\pi$  gab es in beiden Völkern schon Annäherungen. Die Ägypter rechneten mit 3,16, während die Babylonier mit 3 und später mit 3,14 arbeiteten.

Unser Wissen über die Mathematik der Babylonier basiert lediglich auf wenig hundert Tontafeln. Grundsätzlich lassen sich diese Tafeln in zwei verschiedene Arten einteilen. Zum einen existieren Tabellentexten, welche ähnlich zu unseren heutigen Tabellenwerken sind (z.B. die Tabellenwerke den Binomialkoeffizienten beschreibend). Neben Multiplikationstafeln gab es auch solche, welche Informationen über Kehrwerte, Quadrat- und Kubikzahlen sowie Quadratwurzeln festhielten. Diese Tafeln stellen einen essentiellen Bestandteil der babylonischen Mathematik dar. Zum anderen existierten Aufgabentexte, welche verschiedene mathematische Aufgabenstellungen beschreiben. Zu den bekanntesten und Tafeln zählt eine, welche als Plimpton 322 bezeichnet wird (entstanden etwa zwischen 1900 und 1600 v. Chr.). Diese Tafel zählt als das älteste Werk, welches über Zahlentheorie handelt. Daraus lässt sich auch folgern, dass die Babylonier den pythagoräischen Lehrsatz auf rechtwinkligen Dreiecken anwenden konnten. Dafür gab es auch eine Annäherungen an  $\sqrt{2}$  (Tafel YBC 7289), welche lediglich um 0,0000007 zu klein ist.

Durch die Überlieferungen zeigt sich auch, dass nicht nur die Babylonier, sondern auch ihre Vorgänger, die Sumerer, ihre mathematischen Kenntnisse nicht nur für wissenschaftliche Zwecke, sondern hauptsächlich für wirtschaftliche Zwecke verwendeten.

### 1.2.1 Darstellung von Zahlen

Wie schon bemerkt, wurde in Babylonien ein Sexagesimalsystem verwendet. Dadurch ist auch eine andere Darstellung von Zahlen als der unsrigen notwendig. Da sowohl Papyrus als auch Steinplatten zum Schreiben nicht zur Verfügung standen, wurden Zahlen auf Tontafeln mithilfe eines keilförmigen Werkzeugs eingedrückt. Dies wird auch als cuneiform oder Keilschrift bezeichnet. Dadurch entstanden auch die charakteristischen Formen der Ziffern. Von diesen gab es Anfangs auch nur zwei. Die 1 (dargestellt als  $\top$ ) und die 10 ( $\leftarrow$ ). Wie schon erwähnt gab es keine 0, später wurde ein Trennzeichen mit  $\swarrow$  dargestellt. Zahlen unter der 60 wurden dabei direkt geschrieben, zum Beispiel:

$$3 = \top \top \top$$

$$23 = \leftarrow \leftarrow \top \top \top$$

Größere Zahlen hingegen werden wie im folgendem Beispiel gebildet:

$$\text{II} \lll \text{III} = 2 \cdot 60 + 23 = 143$$

Wie in den Beispielen auch zu erkennen ist, werden individuelle Zahlen mit zusammenhängenden Spitzen geschrieben. Dies ist vor allem relevant, wenn wir uns das folgende Beispiel betrachten:

$$\text{I} \text{ I} \text{ III} = 1 \cdot 60^2 + 1 \cdot 60 + 1 = 3663$$

Warum nun ein Trennzeichen benötigt wird, lässt sich durch folgendes Beispiel erschließen:

$$\text{I} \lll \text{I} = 1 \cdot 60^2 + 0 \cdot 60 + 1 = 3601$$

Ein weiterer wichtiger Unterschied im Vergleich zum alt-ägyptischen System war, dass das babylonische System das erste Stellenwertsystem war und als solches kein Symbol für jede Potenzstelle benötigt.

### 1.2.2 Astronomie

Ein Exkurs in diese Thematik ist vor allem deshalb interessant, da sich dadurch die praktischen Möglichkeiten der babylonischen Mathematik zeigen lassen. Die Astronomie war dabei ein großes Anwendungsgebiet der mathematischen Kenntnisse der Babylonier. Die Erde wurde dabei in den Mittelpunkt einer Himmelssphäre gesetzt, an welche die Sterne geheftet sind. Sonne, Mond und andere Planeten wurden im Bezug auf diese Sphäre, welche nicht nur damals, sondern auch heute noch als Bezugspunkt verwendet wird, betrachtet. Darauf folgenden wurden die Bewegungen dieser drei Himmelskörper betrachtet und ein arithmetisches Modell erstellt. Durch dieses war es auch möglich, bestimmte astronomische Ereignisse vorherzusagen. Diese arithmetischen Funktionen, welche aufgrund ihres Aussehens auch als Zickzack-Funktionen bezeichnet werden, wurden in Wertetabellen angegeben. Dabei war allerdings nicht mehr die Beobachtung alleine der Weg zum Ziel, sondern vor allem Interpretierung. Praktisch konnten dadurch Finsternisse vorausgesehen werden. Diese Berechnungen sind auch Zeichen des Erfolgs ihres sexagesimalen Zahlensystems, durch welches viele Berechnungen vereinfacht oder überhaupt erst möglich wurden.

Durch die astronomischen Errungenschaften wurde auch der babylonische Kalender aufgestellt, welcher als weiteres Zeichen der Relevanz der mathematischen Kenntnisse im (agrar-) wirtschaftlichen Bereich gesehen werden kann.

## 2 Griechische Mathematik

Die griechische Mathematik selbst lässt sich in drei Zeitalter einteilen. Zuerst gab es die hellenische Zeit, welche von den Anfängen der griechischen Mathematik bis zu Euklid reichte. Mit Euklid begann die hellenistische Zeit, in welcher nebst anderen auch Archimedes lebte und wirkte. Das Ende der griechischen Kultur wird als das epigonisches Zeitalter bezeichnet.

Allgemein lässt sich feststellen, dass die Griechen sich, ebenso wie die Babylonier, mit der Astronomie beschäftigten. Im Gegensatz zu diesen stellten sie allerdings kein arithmetisches,

sondern ein geometrisches Modell auf. In diesem sahen sie die Erde als Kugel (darüber, ob nun die Erde oder die Sonne im Mittelpunkt standen, gab es unterschiedliche Meinungen) und die Sonne und den Mond als physikalische Körper. Diese beiden Körper haben einen festen Abstand zur Erde und die Bewegungen aller drei stehen in einem Verhältnis. Es sei auch zu erwähnen, dass die griechischen Astronomen das aus Babylon bekannte sexagesimale Zahlensystem dem griechischen System mit Basis 10 vorzogen.

Eine weitere wichtige Errungenschaft der griechischen Mathematiker ist die Einführung von begrenzenden Ungleichungen um die Genauigkeit von Rechnungen zu bestimmen. Auch galt die griechische Zeit als die erste, in welcher sich der Mensch fundamentale Fragen stellte, und diese auch versuchte zu lösen. Die Wissenschaft ging also vom *Wie?* zum *Warum?*.

## 2.1 Hellenisches Zeitalter

Die griechische Mathematik hat gleichzeitig mit der griechischen Philosophie durch **Thales** von Milet (624-546 v.Chr.) begonnen. Dieser formulierte etliche babylonische und ägyptische Kenntnisse aus und beschäftigte sich mit der geometrischen Form des Kreises. Darunter fand er auch einen Beweis, dass der Kreis durch dessen Durchmesser halbiert werden kann. Weitergehend bewies er unter anderem auch, dass die Winkel eines gleichschenkligen Dreiecks gleich sind, genauso wie gegenüberliegende Winkel, die durch das Schneiden zweier Geraden entstanden sind. Doch nicht nur die Erkenntnisse selbst sind wertvoll, sondern vor allem, dass Thales die Beweise durch logische Schlussfolgerungen fand. Angeblich konnte er auch die Höhe von ägyptischen Pyramiden anhand deren Schattenlänge bestimmen.

Als sein Nachfolger gilt **Anaximander** (610-546 v.Chr.), welcher eine relativ genaue Erdkarte der damals bekannten Welt anhand mathematischer Gesichtspunkte zeichnete.

Darauffolgend führte die Schule von **Pythagoras** (570-495 v.Chr.) die Mathematik weiter, wobei sich nachträglich nicht mehr feststellen lässt, wie viele wissenschaftlichen Erkenntnisse Pythagoras selbst vollbrachte und wie viele seine Anhänger. Er selbst wurde vermutlich in Samos geboren. Nachdem er nach einigen Reisen zurück in seine Heimatstadt kam, herrschte dort der Tyrann Polykrates, woraufhin er nach in den griechischen Hafen Crotona in Süditalien zog und eine Schule gründete. Durch diese wurde die Mathematik zur eigenen Wissenschaft, wobei auch etliche Dinge aus der babylonischen Mathematik übernommen wurden, wie z.B. der Satz von Pythagoras oder die Proportionslehre. Allerdings erlangte die Schule und ihre Mitglieder so großen gesellschaftlichen Einfluss, dass die Gebäude zerstört wurden, woraufhin sich die Schule auflöste. Pythagoras floh wahrscheinlich nach Metapontum, wo er auch starb.

**Hippasus** entdeckte das Irrationale und sorgte damit für ein größeres Problem in der Mathematik, da bis dahin nur in ganzen Zahlen gedacht wurde. Daraufhin wurde die Mathematik unter Verwendung der geometrischen Algebra neu definiert.

Zur Zeit von **Hippokrates** (460-370 v.Chr.) waren bereits die Grundlagen der Elementargeometrie bekannt. Er beschäftigte sich auch mit höheren Problemen, wie der Kreisquadratur, welche auch durch Anaxagoras, Antiphon und Byson betrachtet wurde.

Ein weiterer großer Mathematiker in der hellenischen Zeit war **Eudoxus** (390-337 v.Chr.), welcher die Mathematik zu Anfang des 4. Jh. neu begründet. Von ihm wurde auch die Theorie der irrationalen Zahlen entworfen, welche in Teilen heute noch Gültigkeit hat. Weitergehend begründete er auch die allgemeine Proportionslehre.

Der erste, der den Rauminhalt von Pyramiden und Kegeln bestimmen konnte, war **Demokrit** (460-370 v.Chr.). Von diesem sind allerdings keine mathematischen Schriften mehr überliefert.

**Archytas** (428-347 v.Chr.) löste als erster das sogenannte delische Problem, die Quadratur des Würfels. Später lösten auch Eudoxus und **Menaichmus** (380-320 v.Chr.) dieses Problem auf andere Weisen. Sein Ansatz wurde noch bis in das 16. Jahrhundert gelöst. Menaichmus wird auch zugeschrieben, dass er etliche Erkenntnisse bezüglich Kegelschnitten fand.

Die Grundlegung der Zahlentheorie, sowie eine Ordnung von quadratischen Irrationalitäten wurden beide von **Theätet** (415-369 v.Chr.) verfasst. Ebenso auch die Konstruktion der fünf regelmäßigen Körper (Tetraeder, Hexaeder, Oktaeder, Dodekaeder, Ikosaeder).

Als einer der letzten Mathematiker der hellenischen Zeit gilt **Aristoteles** (384-322 v.Chr.), welcher sich vor allem mit dem Unendlichen und der Kontinuität beschäftigte. Sein Lehrer, Platon, beschrieb die Verbindung der Mathematik mit der Philosophie durch die Aussage, dass die Mathematik die Pforte zur Philosophie sei. Es ist zwar keine Forschung von Platon selbst überliefert, allerdings wird angenommen, dass so gut wie alle Erkenntnisse des 4. Jahrhunderts v. Chr. durch Freunde und Schüler Platons entstanden. Platons Beitrag zur Mathematik lässt sich also eher darin sehen, dass er andere zu mathematischen Höchstleistungen aufforderte.

## 2.2 Hellenistisches Zeitalter

In der hellenischen Zeit waren Philosophie und Mathematik stark verbunden. Die meisten Mathematiker waren Philosophen und auch umgekehrt beschäftigten sich viele Philosophen mit der Mathematik. Diese enge Verbindung löste sich mit dem hellenistischen Zeitalter allerdings auf. Während bisher Thesen auf philosophische Art bewiesen wurden, wurde in der hellenistischen Zeit mehr pragmatisch und logisch argumentiert.

Allgemein gab es in der hellenistischen Zeit drei große Mathematiker. Zum einen war da **Euklid** von Alexandria (3. Jh. v.Chr.), zum anderen auch **Archimedes** von Syrakus (287-212 v.Chr.) und **Apollonios** von Perge (265-190 v.Chr.). Neben diesen drei großen Persönlichkeiten gab es noch einige weniger bekannte Mathematiker, die teilweise zwar ebenfalls bahnbrechendes geleistet haben, allerdings nicht mit diesen drei vergleichbar sind.

### 2.2.1 Euklid

Zuerst sei Euklid betrachtet, der Verfasser der „Elemente“, durch die er die gesamte Mathematik auf eine Art und Weise begründete, welche bis zur Definition des Logikkalküls um das 19./20. Jahrhundert verwendet wurde. Dabei verwendete er in seinen Büchern auch Strukturen, welche wir in den Grundzügen auch in heutigen mathematischen Werken finden. Allgemein galten die Elemente von Euklid als das mathematische Standardwerk. Dieses Werk brachte allerdings nicht nur Vorteile mit sich, denn dadurch, dass dieses derart vollständig war, wurden ältere mathematische Texte der Griechen nicht mehr weiter betrachtet. Dies hatte auch zur Folge, dass von den griechischen Mathematikern vor Euklid keine Originale vorhanden sind. Vor Euklid haben auch schon Hippokrates, Leon und Theudius von Magnesia versucht, ein solches Werk zu erstellen. Zumindest die Elemente von Theudius, welcher an Platons Schule entstanden sind, müssen Euklid bekannt gewesen sein. Die ersten vier der insgesamt dreizehn Bücher handelten von elementarer Geometrie, das fünfte behandelt die eudoxische allgemeine

Proportionslehre. Im sechsten Buch wird auf die Theorie der ähnlichen Figuren und im sieben bis neunten auf die Zahlentheorie eingegangen. Das zehnte handelt über die Klassifikation der quadratischen Irrationalitäten, das elfte beinhaltet die Elemente der Stereometrie. Im zwölften Buch werden die eudoxischen Exhaustionsbeweise für Inhaltsbestimmungen angegeben und im letzten Buch finden sich Konstruktionen der regulären Körper sowie weitere Informationen über diese. Neben den Elementen schuf er auch noch andere Werke, wie z.B. die „Data“, von welchen allerdings nicht mehr alle erhalten sind. Es ist auch nicht ganz erschließbar, ob oder wie viel Euklid selbst geforscht hat oder ob man ihn eher als Systematiker einordnen sollte. Neben seinen Werken ist über ihn sehr wenig bekannt. Er leitete die mathematische Abteilung der Bibliothek von Alexandria und lernte vermutlich an Platons Schule.

### 2.2.2 Archimedes

Archimedes gilt als der größten Mathematiker der Antike. Es wird auch gesagt, dass bis in das 17. Jahrhundert hinein die Mathematik nicht mehr auf der gleichen Höhe wie zur Zeit dessen war. Doch Archimedes war nicht nur Mathematiker, er war vor allem auch Erfinder. Er ist der Begründer der Statik sowie der Hydrostatik und entwickelte auch Verfahren, welche ähnlich der Integralrechnung sind. Eben diese Erkenntnisse legten den Grundstein der uns heute bekannten Infinitesimalrechnung, eines der wichtigsten mathematischen Verfahren, welche von Newton und Leibniz festgelegt wurde. Neben der Lösung von größeren kubischen Aufgaben, gelang ihm auch eine relativ gute Einschätzung der Zahl  $\pi$ . An der Annäherung an diese zeigt sich auch, inwiefern mathematische Forschungen teilweise Jahrhunderte benötigen, bis sie zu einem Ergebnis kommen (wenn überhaupt). Wie schon weiter oben erwähnt, beschäftigten sich auch die Babylonier und Ägypter mit der Zahl  $\pi$ . Zuerst wurde diese durch grobe Schätzungen angenommen, erst später entwickelten die Babylonier ein Verfahren, mit welchem sich die Zahl beliebig genau berechnen lassen konnte (Tafeln von Susa). Archimedes verfeinerte dies, indem er mit einem geometrischen Verfahren arbeitete und eine obere und untere Schranke für  $\pi$  festsetzte. Erst im 17. Jahrhundert wurde ein neues Verfahren entwickelt, welches nicht mehr geometrisch war, sondern auf unendlichen Reihen basiert. Durch die Gregorysche Reihe lässt sich  $\frac{\pi}{4}$  annähern. Diese geometrische Verfahren erfordert allerdings viel arithmetische Arbeit und eignet sich deshalb eher für Maschinen. Des Weiteren beschäftigte sich Archimedes auch einige Zeit mit der nach ihm benannten archimedischen Spirale. Neben weiteren anderen Untersuchungen hat er auch die Grundlagen für die Trigonometrie gelegt.

### 2.2.3 Apollonios

Der 22 Jahre jüngere Apollonios, welcher, wie viele andere Wissenschaftler dieser Zeit, einen Großteil seines Lebens in Alexandria verbrachte, hat sich weniger mit neuer Forschung beschäftigt, sondern führte vor allem bereits Bekanntes weiter. So entstand auch ein Werk mit acht Büchern über Kreisschnitte, für welches ihn nicht nur seine Zeitgenossen ehrten, sondern welches auch noch Jahrhunderte später von Kepler und Newton für die Aufstellung der Planetentheorie verwendet wurde.



#### 2.2.4 Weitere Mathematiker

Neben den drei großen Mathematikern gab es auch einige, die es nicht zu gleichem Ruhm gebracht haben, allerdings trotzdem viele wissenschaftliche Erkenntnisse geliefert haben. So auch **Eratosthenes** (276-237 v. Chr.), welcher eine relativ genaue Einschätzung des Erdumfangs lieferte und weitergehend auch eine Methode zum Auffinden von Primzahlen fand. Eratosthenes war ein Meister auf vielen Gebieten und oberster Bibliothekar in der Bibliothek von Alexandria. Im astronomische Bezug sei auch auf **Aristarchos** von Samos (ca. 310-230 v. Chr.) hinzuweisen, welcher unter anderem den Abstand zwischen Erde und Mond genau schätzte. Beide zeigten der griechischen Gesellschaft mit ihren Erkenntnissen, wie klein der Teil der damals bekannten Welt war. Auch zu erwähnen sind Diokles (240-180 v.Chr.), Nikomedes (280-210 v.Chr.), Dionysodor (250-190 v.Chr.) und Zenodoros (200-140 v.Chr.).

### 2.3 Epigonisches Zeitalter

Nach der hellenistischen Zeit erlahmte der Forschungsdrang der Griechen. Es gab wenige bis keine neuen Forschungen und die Mathematik als Wissenschaft wurde eher in den Hintergrund gedrängt. Das heißt nicht, dass keine mathematischen Werke mehr entstanden, doch es sind zumeist Sammlungen oder Kommentierungen von bereits Bekanntem. Unter diesen sind vor allem die „Mathematischen Sammlungen“ von **Pappos** (290-350 n.Chr.) zu erwähnen. Neben dieser schrieb er auch Kommentare über Werke von Euclid und Ptolemeios. Das Forschungsinteresse wendet sich allerdings eher astronomischen Problemen zu, wodurch weitere Grundlagen der Trigonometrie entstanden, was als eine der wenigen mathematischen Hochleistungen dieser Zeit gilt.

Einen großen Teil dazu hat **Hipparchus** (ca. 190-120 v.Chr.) beigetragen. Vor allem seine grundlegende Arbeit zum Erstellen einer Chordtafel (Bestimmung der Sehnenlänge im Einheitskreis anhand eines Winkels) wurde auch etwa zweihundert Jahre später von Ptolemeios verwendet. Sein Schwerpunkt war allerdings die Astronomie. Er konnte Länge eines Mondmonats mit nur einer geringen Abweichung vom heutigen Wert bestimmen, ebenso die Neigung der Ekliptik, also der Bahn die die Sonne im Laufe eines Jahres im Bezug auf die sogenannten Fixsterne beschreitet. Weitere Bestimmungen waren die Verschiebungen der Tag-Nacht-Zeiten durch das Jahr, sowie die Parallaxe, Erdnähe und mittlere Bewegung des Mondes. Es ist auch bekannt, dass er etwa 800-900 Sterne katalogisiert hat.

Ein weiterer Mathematiker, welcher sich mit Trigonometrie beschäftigte, war **Menelaos** von Alexandria (ca. 45/50-110/120 n.Chr.), von welchem ein Werk über sphärische Trigonometrie überliefert ist, in welchem er unter anderem die Erkenntnisse von Euklid über die planare Trigonometrie auf die sphärische überträgt. Er ist auch bekannt für den nach ihm benannten Satz von Menelaos.

Zu den weiteren wichtigen Werken dieser Zeit gehört unter anderem das große Sammelwerk der Astronomie mit dem Namen „Almagest“ von **Klaudius Ptolemeios** (100-170 n.Chr.), welches aus dreizehn Büchern bestand. Das erste Buch beinhaltet unter anderem auch die Chordtabelle.

Eine weitere Sammlung aus drei Büchern stellt die „Metrik“ **Heron** von Alexandria (10-70 n.Chr.) dar, welche (geometrische) Erkenntnisse und Berechnungen von den Ägyptern bis hin

zu Archimedes sammelt. Besonders hervorzuheben ist darin auch eine Methode zur Annäherung von Wurzeln von nicht-quadratischen Zahlen. Neben mathematischen Texten schrieb Heron auch Bücher über die Mechanik, zum Beispiel die „Dioptra“ und die „Catoptrica“.

In der Zeit nach Christi Geburt sind auch die Schulen von Pythagoras oder Platon als Neupythagoreern oder Neuplatonisten wieder aufgekommen (diese Richtungen vereinten sich später). Zwei Anhänger dieser Richtung, nämlich **Nikomachos** (60-120 n.Chr.) und **Theon** von Smyrna (70-135 n.Chr.), schrieben ein Sammelwerk der Arithmetik im philosophischem Stil. Weitere der sogenannten Kommentatoren waren Theons Tochter Hypatia (die erste Frau, welche in der mathematischen Geschichte erwähnt wird), Proclus, Simplicius und Eutocius.

Der letzte große Mathematiker ist **Diophantos** von Alexandria (201/215-285/299 n.Chr.), welcher die meisten anderen Mathematiker dieser Zeit in den Schatten stellt. In seinem Werk „Arithmetika“ löst er, unter Zuhilfenahme der Geometrie, Potenzen bis zum Exponenten 6 und auch quadratische Aufgaben mit mehreren Unbekannten. Er hat maßgeblich zur Zahlentheorie beigetragen, auch Fermat nutzte noch seine Erkenntnisse.

Die Römer hingegen haben nicht viel zur Mathematik beigetragen. Lediglich im byzantinischen Reich gab es noch einige Mathematiker wie Eutokios (480-540 n.Chr.) oder Anthemius (420-472 n.Chr.). Mit Beginn des Mittelalters in Europa schlafen dann sämtliche mathematischen und philosophischen Bemühungen vollkommen ein, im Orient allerdings wurden sie gerettet und weiterhin geforscht.

## 2.4 Darstellung von Zahlen

Die Griechen hatten mehrere Zahlensysteme. In der frühen Zeit wurde das attische, acrophonische oder auch herodianische System verwendet, welches ähnlich dem römischen System ist. Der größte Unterschied bei der Schreibweise war, dass die Subtraktion durch Voranstellen einer kleineren Ziffer nicht verwendet wurde. Beispielweise wurde (in römischen Ziffern geschrieben) die 4 nicht als IV sondern als IIII geschrieben. Nur in späteren Zeiten wurde dieses Prinzip der Subtraktion häufiger verwendet. Neben den Zehnerpotenzen und der Fünf, gab es auch besondere Zeichen für die Zehnfachen von 5. Die Ziffern dieses Systems sind folgende:

Zahlenwert	Symbol
1	I
5	II
10	Δ
$5 \cdot 10 = 50$	Ϟ
100	H
$5 \cdot 100 = 500$	Ϟ
1000	X
$5 \cdot 1000 = 5000$	Ϟ
10000	M

Somit lässt sich die Zahl 2857 als X X Ϟ H H H Ϟ II I schreiben.

Wie schon erwähnt, war dies nur eines der Zahlensysteme der Griechen. Am häufigsten verwendeten sie ihre alphabetischen Schriftzeichen zum Darstellen von Zahlen, wobei auch

hier in ähnlicher Weise wie bei den Römern und Ägyptern verfahren wurde, wenn auch im Gegensatz zu diesen Platz eingespart wurde. Sämtlich Ziffern von 1 bis 9 sowie deren zehnfache und hunderfache hatten eigene Symbole, welche im folgenden aufgeführt sind.

Zahl	Symbol	Name	Zahl	Symbol	Name	Zahl	Symbol	Name
1	$\alpha$	Alpha	10	$\iota$	Iota	100	$\rho$	Rho
2	$\beta$	Beta	20	$\kappa$	Kappa	200	$\sigma$	Sigma
3	$\gamma$	Gamma	30	$\lambda$	Lambda	300	$\tau$	Tau
4	$\delta$	Delta	40	$\mu$	Mu	400	$\upsilon$	Upsilon
5	$\epsilon$	Epsilon	50	$\nu$	Nu	500	$\phi$	Phi
6	$\varsigma$	Diagamma	60	$\xi$	Xi	600	$\chi$	Chi
7	$\zeta$	Zeta	70	$\omicron$	Omicron	700	$\psi$	Psi
8	$\eta$	Eta	80	$\pi$	Pi	800	$\omega$	Omega
9	$\theta$	Theta	90	$\varrho$	Koppa	900	$\varsigma$	Sampi

Es lässt sich also die Zahl 849 als  $\omega\mu\theta$  darstellen. Für das Tausendfache der Ziffern 1 bis 9 wird den entsprechenden Buchstaben ein tiefgestelltes Apostroph vorangestellt, zum Beispiel  $\alpha'$  für 1000 und  $\beta'$  für 2000. Unser Beispiel von vorher, die Zahl 2857, lässt sich also in diesem System wie folgt darstellen:

$$2857 = \beta'\omega\nu\zeta$$

Für noch größere Zahlen (also Zahlen  $\geq 10000$ ) wird das Zeichen  $M$  mit alphabetischen Ziffern überschrieben. Somit ist  $M^\beta = 20000$  und  $M^{\zeta\rho\omega\epsilon} = 71\,755\,875$ . Das  $M$  wird hier also als Stellensystem mit Basis 10000 verwendet. Die  $M$  wird dabei auch als (erste) Myriade bezeichnet. Folglich gab es auch eine zweite, dritte, usw. Vor allem Archimedes hat sich viel mit der Darstellung großer Zahlen beschäftigt. Er teilte die Myriaden in Ordnungen ein. Die erste und zweite Myriade beinhalteten die Zahlen der ersten Ordnung, die Zahlen der dritten und vierten die zweite Ordnung, usw.. Alle Zahlen von der 1 bis zur  $10^8$ -ten Ordnung bezeichnete er dabei als erste Periode. Dies lässt sich auch wieder weiterführen bis zu einer Periode, die Archimedes als *die Periode* bezeichnete. Dies war  $P^{10^8} = ((10^8)^{10^8})^{10^8}$ . Allerdings benutzte er für solche großen Zahlen keine Zeichen, sondern er beschrieb diese Zahlen mit Worten.

## Literatur

- [1] Oskar Becker, *Das mathematische Denken der Antike*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, Zweite Auflage, 1966.
- [2] Howard Eves, *An Introduction to the History of Mathematics*, Saunders College Publishing, Philadelphia, Fünfte Auflage, 1983.
- [3] H. L. Resnikoff, R. O. Wells Jr., *Mathematik im Wandel der Kulturen*, Friedrich Vieweg & Sohn, Braunschweig / Wiesbaden, 1983.